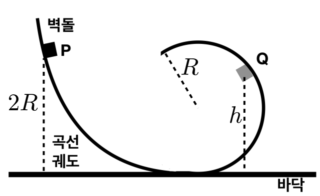
1. (20점) 질량이 m인 물체가 $t=0$일 때 $y=0$에서 초기 속도 $v_0\hat{\jmath}$로 y축 위에서 운동을 시작한다($\hat{\jmath}$는 y축 방향 단위벡터). 중력은 $-mg\hat{\jmath}$로 균일하게 작용하며, 물체의 속도가 $\vec{v}$일 때 $-m\gamma\vec{v}$의 공기저항이 발생한다. 시간 t일 때 물체의 위치 $y(t)$를 구하시오.

2. (20점) 질량이 M이고 반지름이 R인 두 천체가 있다. 이 천체들의 중심의 위치는 각각 $(-2R,0,0)$, $(2R,0,0)$이며 움직이지 않는다고 가정한다. 어떤 비행체가 원점에서 $(0,0,v_0)$의 속도로 이동하고 있다고 할 때, 이 비행체가 이 두 천체의 중력장으로부터 완전히 벗어나기 위한 최소 속력 v_0을 구하시오.

3. (20점) x축 위에서 1차원 운동하는 질량 m인 입자가 있다. 이 입자의 위치가 x이고 속도가 v일 때 이 입자에 작용하는 힘은 $F=2mkvx$로 주어진다($k>0$). 시간 $t=0$일 때 $+x$ 방향으로 속력 v_0로 원점($x=0$)을 지나간다고 할 때, 입자의 위치 $x(t)$를 구하시오.

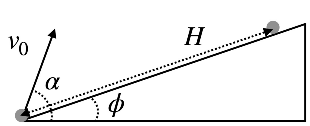
4. (20점) 바닥으로부터 높이 $2R$인 점 P에서 정지상태에서 운동을 시작하는 벽돌이 있다. 이 벽돌은 원궤도에 들어가게 되고 점 Q에서 원궤도에서 벗어나게 된다. 원궤도의 반지름이 R이라면 점 Q의 바닥으로부터의 높이 h를 구하시오. (단, 모든 종류의 마찰은 무시하고 벽돌의 크기도 무시한다.)



5. (20점) 경사도 ϕ인 언덕 밑에서 초기속력 v_0, 수평면에 대한 각 α로 돌을 던진다. 언덕을 따라서 잰 돌의 사정거리는

$$H=\frac{2v_0^2\cos\alpha\sin(\alpha-\phi)}{g\cos^2\phi}$$

임을 보이고, 최대 사정거리는 $\frac{v_0^2}{g(1+\sin\phi)}$ 임을 보이시오.



6. (20점) 질량이 m인 물체가 용수철 상수 $m\omega^2$인 용수철에 매달려 1차원 운동을 한다. 초기 위치가 x_0이고, 초기 속도가 v_0라면, 이 물체의 위치 $x(t)$를 구하시오. (단, 원점은 용수철의 평형점이다.)

7. (20점) 힘 $\vec{F}=xy\hat{\imath}+cx^2\hat{\jmath}+z^3\hat{k}$이 보존력이 되도록 하는 상수 c의 값을 구하시오. (단, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$는 각각 x,y,z축 방향 단위벡터다.)

8. (20점) 주기적인 직각파 $f(t)$는 다음처럼 주어진다.

$$f(t)=1 \quad \text{for} \quad 0<\omega t<\pi,\ 2\pi<\omega t<3\pi,\cdots$$
$$f(t)=-1 \quad \text{for} \quad \pi<\omega t<2\pi,\ 3\pi<\omega t<4\pi,\cdots$$

이 직각파의 푸리에 급수는 다음과 같음을 증명하라.

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega t)+\cdots\right]$$

9. (20점) 질량이 m인 물체가 $\vec{F}=m\omega\vec{v}\times\hat{\imath}+mR\omega^2\hat{k}$의 힘을 받으며 운동하고 있다. 여기에서 $\vec{v}$는 이 물체의 속도이고 ω, R은 양의 상수이며 $\hat{\imath}$, $\hat{k}$는 각각 x축, z축 방향의 단위벡터를 나타낸다. $t=0$일 때 이 물체가 원점에 정지하고 있었다고 할 때, 시간 t에서 물체의 위치를 구하시오. (힌트: 이 물체는 yz 평면 상에서만 움직인다.)

10. (20점) 어떤 단진자의 운동방정식은 $\ddot{\theta}+\sin\theta=0$이다. θ_0가 진동 진폭이라면 주기 T는 $\alpha=\sin^2(\theta_0/2)$라고 했을 때

$$T=4\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\phi}}$$

임을 보이고, 위 적분을 α의 급수로 전개하여 $O(\alpha^2)$항까지 계산하시오.

11. (20점) 질량이 m인 물체를 바닥에서 연직방향으로 초기 속력 v_0로 던졌다. 중력가속도는 g이고, 속력이 v일 때 공기저항의 크기가 mkv^2 ($k>0$)이라고 알려졌다. 이 물체가 올라갈 수 있는 최대 높이를 구하고, $k\to 0$인 극한에서 최대 높이는 $v_0^2/(2g)$임을 보이시오.

1. (20점) 전하가 균일하게 분포되어 있는 평평한 원판이 있다. 이 원판의 면전하밀도는 σ이고, 이 원판의 경계는 xy 평면상에서 $x^2 + y^2 = R^2$이다. 위치 $(0, 0, z)$에서의 전기장을 구하고(단, $z > 0$), $R \to \infty$인 경우와 $z \gg R$인 경우 각각에 대해 이 전기장이 어떻게 되는지 보이시오.

2. (20점) 3차원 공간에서 원점으로부터 r만큼 떨어진 지점의 전하밀도가 $r > R$이면 $\rho(r) = 0$이고, $r < R$이면 $\rho(r) = kr$이라고 한다(단, k는 양의 상수). 중심으로부터 r만큼 떨어진 지점의 전기장을 구하되, $r < R$인 경우와 $r > R$인 경우를 구분하여 구하시오.

3. (20점) 반지름이 R이고 무한히 긴 원통의 전하밀도가 ρ다. 이 원통의 중심축으로부터 r만큼 떨어진 지점의 전기장을 구하되, $r < R$인 경우와 $r > R$인 경우를 구분하여 구하시오.

4. (20점) 전하 q가 $(0, 0, 0)$에 놓여 있고, 전하 $-3q$가 $(d, 0, 0)$에 놓여 있다. 전위가 0인 곡면은 구가 된다. 이 구의 중심의 위치와 반지름을 구하시오.

5. (20점) 반지름이 R인 공 안에 전하가 고르게 퍼져있다. 이 공 안의 전체 전하가 Q일 때, 이 전하분포에 의한 전체 에너지를 구하시오.

6. (20점) 3차원 공간에서 $z = 0$인 평면이 도체로 되어 있다. 이 도체평면은 접지되어 있다. 또한 위치 $\vec{r} = (0, 0, d)$에 전하 q가 놓여 있다. 도체평면에 유도된 표면전하밀도 $\sigma(x, y, 0)$을 구하고,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{평면}} \frac{q\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') da$$

을 직접 계산하여 q가 받는 힘을 구하시오.

7. (20점) 반지름이 R인 도체구가 있다. 이 도체구의 중심으로부터 거리 a $(a > R)$만큼 떨어진 지점에 전하 q가 놓여 있을 때 전하 q가 받는 힘의 크기를 구하시오. (단, 도체구의 전체 전하는 0이고 이 도체구와 전하 q는 외부와 완전히 고립되어 있으며 도체구의 전위는 0이 아니다.)

8. (20점) 중심이 원점에 위치한, 반지름이 R인 도체구가 있다. 이 도체구의 전체 전하는 0이고, 균일한 전기장 $\vec{E} = E_0\hat{z}$의 영향 아래에 있다($\hat{z}$는 z축 방향 단위벡터). 구면좌표계를 사용하여 이 도체구에 유도되는 표면전하밀도 σ를 구하시오.

9. (20점) 중심이 원점에 위치한, 반지름이 R인 구껍질이 있다. 구껍질 위의 표면전하밀도가 $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$일 때, 이 구껍질에 의한 전기쌍극자 $\vec{p}$를 구하시오. 단, σ_0는 상수이고, 구의 원점을 중심으로 하는 구면좌표계 (r, θ, ϕ)를 사용하고 있다.

10. (20점) 균일한 전기장 $\vec{E}_0$가 있는 빈 공간에 선형 유전체로 된 공을 두었다. 유전체의 반지름은 R이고 유전상수(상대유전율)는 K다. 유전체 내부의 전기장은

$$\vec{E} = \frac{3}{K+2}\vec{E}_0$$

가 됨을 보이시오.

11. (20점) 반지름이 a인 도체구가 반지름 c인 도체구 껍질 안에 들어있다. 도체구와 도체구 껍질의 중심은 일치한다. 도체구와 도체구 껍질 중간에 $r = a$부터 $r = b$까지 유전율 ϵ인 선형 유전체가 들어가 있다($a < b < c$). 이 도체구, 도체구 껍질, 유전체로 이루어진 축전기의 전기용량을 구하시오.

1. (20점) 길이가 a인 1차원 상자 속에 질량이 m인 입자가 있다. 해밀토니안의 고유값과 규격화된 고유상태를 구하시오.

2. (20점) 조화 진동자의 해밀토니안은 다음과 같이 주어진다.
$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)$$
위에서 $\hat{a}_+$, $\hat{a}_-$는 계단 연산자로서 다음의 교환관계를 만족한다. $[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1$. 위 식을 이용하여 $[\hat{H}, \hat{a}_\pm] = \pm\hbar\omega a_\pm$이 됨을 보이고, 이 결과를 이용하여 $\psi_n(x)$가 $\hat{H}$의 고유상태이고 그 고유값이 E라면, $\hat{a}_\pm\psi_n(x)$ 역시 $\hat{H}$의 고유상태이고 그 고유값이 $E \pm \hbar\omega$임을 보이시오.

3. (20점) 에르미트(hermitian) 연산자 $\hat{A}$의 고유값은 반드시 실수가 됨을 보이고, $\hat{A}$의 서로 다른 고유값에 대응하는 두 고유벡터는 직교함을 보이시오.

4. (20점) 어떤 연산자 $\hat{\Omega}$에 대하여 $\hat{\Omega}^\dagger$는 모든 벡터 V, W에 대하여 다음의 관계식을 만족시키는 연산자로 정의된다. $\langle V|\hat{\Omega}^\dagger|W\rangle = \langle W|\hat{\Omega}|V\rangle^*$ 여기에서 *는 복소수 켤레를 의미한다. 이 정의로부터 다음을 보이시오.
   (a) α가 복소수이면 $\alpha^\dagger = \alpha^*$.
   (a) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$

5. (20점) 일차원 델타 포텐셜 $V(x) = \alpha\delta(x)$의 영향을 받는 질량 m인 물체의 산란상태에 대하여 투과계수 T를 구하시오.

6. (20점) 일차원 델타 포텐셜 $V(x) = -\alpha\delta(x)$의 영향을 받는 질량 m인 물체의 속박상태의 에너지와 파동함수를 구하시오. (단, $\alpha > 0$이고 파동함수의 규격화는 고려하지 않아도 된다.)

7. (20점) 조화 진동자의 고유함수는 다음을 만족한다.
$$\hat{H}\psi_n(x) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi_n(x)$$
단, $\psi_n(x)$는 규격화되어 있다. 만약 이 입자의 파동함수가 다음과 같이 주어졌다고 하자.
$$\psi(x) = C\left[\psi_0(x) + i2\psi_1(x) - 2\psi_3(x)\right]$$
규격화 상수 C를 구하고, 이 상태에 대한 에너지 평균을 구하시오.

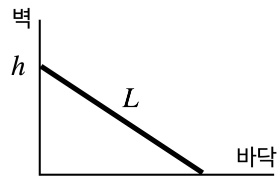
8. (20점) 2차원 힐버트 공간의 직교기저 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$에 대하여 해밀토니안이 다음과 같은 행렬로 표현된다고 하자.
$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & V \\ V & E \end{pmatrix}$$
단, E, V는 모두 실수이다. 이 해밀토니안의 고유값과 고유상태를 구하시오.

9. (20점) $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$임을 보이고, 이 결과를 이용하여 $[\hat{x}, \hat{p}^n] = i\hbar n\hat{p}^{n-1}$ (n은 양의 정수)가 성립함을 수학적 귀납법으로 보이시오.

10. (20점) 정상상태에 대하여 아래 식이 성립함을 보이시오.
$$2\langle T\rangle = \left\langle x\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$$
반드시 이 결과를 이용하여 조화진동자의 정상상태에서는 운동에너지의 평균과 위치에너지의 평균이 같음을 보이시오.

11. (20점) $\hat{A}|n\rangle = c_n|n\rangle$이고 고유값은 겹치지 않는다. 만약 $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$이면 $|n\rangle$ 역시 $\hat{B}$의 고유상태가 됨을 보이시오.

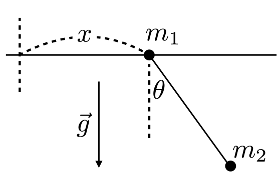
1. (25점) 마찰이 없는 바닥과 벽에 길이 L인 막대가 그림처럼 놓여 있다. 막대가 미끄러지기 시작할 때, 막대가 벽에 접한 위치의 높이가 h라고 한다면, 막대가 벽에서 떨어지는 순간, 막대가 벽에 접한 위치의 높이를 구하시오.



2. (25점) 길이가 L이고 질량이 m인 균질한 막대의 양쪽 끝을 두 사람이 들고 있다. 한 사람이 갑자기 막대를 놓았다고 하자. 막대를 놓는 순간 다른 사람의 손에 작용하는 하중은 얼마인가?

3. (25점) 위치에너지가 중심으로부터의 거리 r만의 함수인 중심력이 있다. 위치에너지를 $V(r)$이라고 할 때, 이 중심력의 영향을 받아 평면에서 움직이는 질량 m인 물체의 라그랑지안을 r, θ (극좌표)를 이용하여 쓰고, 그 오일러-라그랑지 방정식을 이용하여 그 운동방정식을 쓰시오.

4. (25점) 질량이 m_1인 물체 A에 길이가 L이고 추의 질량이 m_2인 단진자가 연결되어 있다. 물체 A는 중력방향에 수직인 선에서 1차원 운동을 한다. 그림의 일반화 좌표 (x, θ)를 이용하여 운동방정식을 쓰시오. (단, 두 물체의 운동은 종이의 평면에 국한되어 있다고 가정하고, 모든 종류의 마찰은 무시한다.)



5. (25점) 위치에너지 $V(x)$의 영향을 받으며 일차원 운동하는 질량 m인 입자의 라그랑지안을 쓰고, 오일러-라그랑지 방정식은 뉴턴의 가속도 법칙과 같음을 보이시오.

6. (25점) 맥스웰 방정식을 쓰고, 진공에서 전기장과 자기장의 파동방정식을 유도하시오.

7. (25점) 전류 I가 고르게 흐르고 있는 반지름 R인 긴 원통형 전선이 있다. 이 전선의 중심으로부터 r만큼 떨어진 지점의 자기장의 세기를 구하시오. 단, $r < R$이다.

8. (25점) 기전력 $\mathcal{E}_0$인 전지에 저항(R)과 인덕터(인덕턴스 L)를 직렬로 연결하였다. 시간 $t = 0$일 때 전류가 흐르기 시작한다면, 전류가 시간에 따라 다음과 같이 됨을 보이시오.

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t}\right]$$

9. (25점) 균일한 자기장 $\vec{B} = B\hat{z}$속에서 질량 m, 전하 q인 점입자가 속도 $\vec{v} = v_0\hat{y}$로 운동을 시작하면 등속 원운동을 하게 된다. 이 원의 반지름을 구하시오.

10. (25점) z축 방향으로 자기장 $\vec{B}(t) = B(t)\hat{z}$가 고르게 펴져있다. 이 자기장은 $B(t) = B_0 + bt$ (B_0, b는 상수)처럼 시간에 따라 변한다. xy 평면에 놓인 반지름 a인 금속고리에 유도되는 기전력을 구하시오.

11. (25점) 각 운동량 연산자 $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$는 다음의 교환자 관계가 성립한다.

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

$\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2$이라고 할 때, $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$임을 보이시오.

12. (25점) 각운동량 연산자 $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$에 대해 다음의 교환자 관계가 성립한다.

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

$\hat{L}_\pm = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2$라고 할 때, $[\hat{L}_3, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$임을 보이시오.

13. (25점) 길이가 a인 1차된 상자 안에 질량이 m인 입자가 놓여 있다. 이 입자는 $\hat{V} = \alpha\delta(x - a/2)$인 섭동의 영향을 받고 있다. 이 계의 모든 에너지 고유치를 1차 섭동론을 이용하여 구하시오. (단, 섭동이 없는 상자속의 입자의 고유치와 고유상태는 유도하지 않고 결과만 사용해도 된다.)

14. (25점) 조화 진동자의 해밀토니안은 다음과 같다.

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)$$

$\hat{a}_\pm$은 사다리 연산자이다. 하이젠베르크 묘사에서 사다리 연산자를 $\hat{a}_\pm^H(t)$라고 한다면,

$$\frac{d\hat{a}_\pm^H}{dt} = \pm i\omega\hat{a}_\pm^H$$

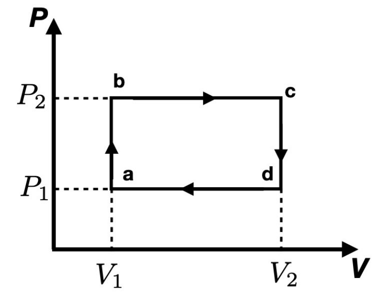
가 됨을 보이시오.

15. (25점) 두 개의 동일한 페르미온이 1차원 상자 속에 놓여 있다. 이 입자들 사이의 상호작용을 무시하고, 스핀은 0이라고 가정하자. 이 계의 바닥상태의 에너지와 고유함수는 무엇인가? (단, 단일 입자가 상자 속에 있을 때의 고유함수와 고유값은 유도하지 않고 결과만 사용해도 된다.)

16. (25점) 에너지가 $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$로 주어지는 1차원 조화 진동자가 온도 T인 열원(heat reservoir)과 접촉하고 있다. 이 조화 진동자의 분배함수를 구하고, 이를 이용하여 평균 에너지를 구하시오.

17. (25점) 질량이 m인 단원자 분자 N개로 이루어진 이상기체가 있다. 이 이상기체의 부피는 V이고 이 이상기체는 온도가 T인 열원(heat reservoir)과 접촉하여 열적 평형상태를 이루고 있다. 이 이상기체의 분배함수를 계산하고, 이를 이용하여 한 입자의 평균에너지를 구하시오. 단, 양자역학을 고려하지 마시오.

18. (25점) 아래 그림은 열 순환 과정($a \to b \to c \to d \to a$)을 나타내고 있다. 한 번 순환할 동안 계가 외부에 한 일의 크기를 구하시오.



19. (25점) 어떤 계의 헬름홀츠 자유에너지가 다음과 같다.

$$F(T) = -N(k_BT)^2/\epsilon_0$$

이 계의 엔트로피를 구하시오.

20. (25점) 가능한 에너지 값이 $-\epsilon$, ϵ인 원자가 N개 있는 계가 있다. 원자간의 상호작용은 무시한다. 이 계가 온도 T의 열적 평형상태에 있다면, 전체 평균에너지는

$$\langle E\rangle = -N\epsilon\tanh(\beta\epsilon)$$

이 됨을 보이시오. 단, $\beta = 1/(k_BT)$이고 $\epsilon > 0$이다.