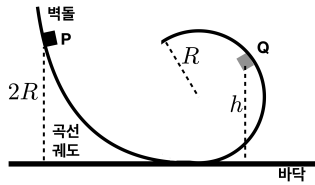


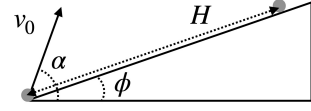
- (20점) 질량이 m 인 물체가 $t = 0$ 일 때 $y = 0$ 에서 초기 속도 $v_0\hat{j}$ 로 y 축 위에서 운동을 시작한다($\hat{j}$ 는 y 축 방향 단위벡터). 중력은 $-mg\hat{j}$ 로 균일하게 작용하며, 물체의 속도가 $\vec{v}$ 일 때 $-m\gamma\vec{v}$ 의 공기저항이 발생한다. 시간 t 일 때 물체의 위치 $y(t)$ 를 구하시오.
- (20점) 질량이 M 이고 반지름이 R 인 두 천체가 있다. 이 천체들의 중심의 위치는 각각 $(-2R, 0, 0)$, $(2R, 0, 0)$ 이며 움직이지 않는다고 가정한다. 어떤 비행체가 원점에서 $(0, 0, v_0)$ 의 속도로 이동하고 있다고 할 때, 이 비행체가 이 두 천체의 중력장으로부터 완전히 벗어나기 위한 최소 속력 v_0 을 구하시오.
- (20점) x 축 위에서 1차원 운동하는 질량 m 인 입자가 있다. 이 입자의 위치가 x 이고 속도가 v 일 때 이 입자에 작용하는 힘은 $F = 2mkvx$ 로 주어진다($k > 0$). 시간 $t = 0$ 일 때 $+x$ 방향으로 속력 v_0 로 원점($x = 0$)을 지나간다고 할 때, 입자의 위치 $x(t)$ 를 구하시오.
- (20점) 바닥으로부터 높이 $2R$ 인 점 P에서 정지상태에서 운동을 시작하는 벽돌이 있다. 이 벽돌은 원궤도에 들어가게 되고 점 Q에서 원궤도에서 벗어나게 된다. 원궤도의 반지름이 R 이라면 점 Q의 바닥으로부터의 높이 h 를 구하시오. (단, 모든 종류의 마찰은 무시하고 벽돌의 크기 무시한다.)



- (20점) 경사도 ϕ 인 언덕 밑에서 초기속력 v_0 , 수평면에 대한 각 α 로 돌을 던진다. 언덕을 따라서 켜 돌의 사정거리는

$$H = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin(\alpha - \phi)}{g \cos^2 \phi}$$

임을 보이고, 최대 사정거리는 $\frac{v_0^2}{g(1+\sin \phi)}$ 임을 보이시오.



- (20점) 질량이 m 인 물체가 용수철 상수 $m\omega^2$ 인 용수철에 매달려 1차원 운동을 한다. 초기 위치가 x_0 이고, 초기 속도가 v_0 라면, 이 물체의 위치 $x(t)$ 를 구하시오. (단, 원점은 용수철의 평형점이다.)
- (20점) 힘 $\vec{F} = xy\hat{i} + cx^2\hat{j} + z^3\hat{k}$ 이 보존력이 되도록 하는 상수 c 의 값을 구하시오. (단, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ 는 각각 x, y, z 축 방향 단위벡터다.)
- (20점) 주기적인 직각파 $f(t)$ 는 다음처럼 주어진다.

$$f(t) = 1 \quad \text{for} \quad 0 < \omega t < \pi, \quad 2\pi < \omega t < 3\pi, \dots$$

$$f(t) = -1 \quad \text{for} \quad \pi < \omega t < 2\pi, \quad 3\pi < \omega t < 4\pi, \dots$$

이 직각파의 푸리에 급수는 다음과 같음을 증명하라.

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

- (20점) 질량이 m 인 물체가 $\vec{F} = m\omega\vec{v} \times \hat{i} + mR\omega^2\hat{k}$ 의 힘을 받으며 운동하고 있다. 여기에서 $\vec{v}$ 는 이 물체의 속도이고 ω , R 은 양의 상수이며 $\hat{i}$, $\hat{k}$ 는 각각 x 축, z 축 방향의 단위벡터를 나타낸다. $t = 0$ 일 때 이 물체가 원점에 정지하고 있었다고 할 때, 시간 t 에서 물체의 위치를 구하시오. (힌트: 이 물체는 yz 평면 상에서만 움직인다.)
- (20점) 벡터에 관한 다음 항등식을 증명하라.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$
- (20점) 질량이 m 인 물체를 바닥에서 연직방향으로 초기속력 v_0 로 던졌다. 중력가속도는 g 이고, 속력이 v 일 때 공기저항의 크기가 mkv^2 ($k > 0$)이라고 알려졌다. 이 물체가 올라갈 수 있는 최대 높이를 구하고, $k \rightarrow 0$ 인 극한에서 최대 높이는 $v_0^2/(2g)$ 임을 보이시오.

1. (20점) 전하가 균일하게 분포되어 있는 평평한 원판이 있다. 이 원판의 면전하밀도는 σ 이고, 이 원판의 경계는 xy 평면상에서 $x^2 + y^2 = R^2$ 이다. 위치 $(0, 0, z)$ 에서의 전기장을 구하고(단, $z > 0$), $R \rightarrow \infty$ 인 경우와 $z \gg R$ 인 경우 각각에 대해 이 전기장이 어떻게 되는지 보이시오.
2. (20점) 3차원 공간에서 원점으로부터 r 만큼 떨어진 지점의 전하밀도가 $r > R$ 이면 $\rho(r) = 0$ 이고, $r < R$ 이면 $\rho(r) = kr$ 이라고 한다(단, k 는 양의 상수). 중심으로부터 r 만큼 떨어진 지점의 전기장을 구하되, $r < R$ 인 경우와 $r > R$ 인 경우를 구분하여 구하시오.
3. (20점) 반지름이 R 이고 무한히 긴 원통의 전하밀도가 ρ 다. 이 원통의 중심축으로부터 r 만큼 떨어진 지점의 전기장을 구하되, $r < R$ 인 경우와 $r > R$ 인 경우를 구분하여 구하시오.
4. (20점) 전하 q 가 $(0, 0, 0)$ 에 놓여 있고, 전하 $-3q$ 가 $(d, 0, 0)$ 에 놓여 있다. 전위가 0인 곡면은 구가 된다. 이 구의 중심의 위치와 반지름을 구하시오.
5. (20점) 반지름이 R 인 공 안에 전하가 고르게 퍼져있다. 이 공 안의 전체 전하가 Q 일 때, 이 전하분포에 의한 전체 에너지를 구하시오.
6. (20점) 반지름이 R 인 공에 전하가 고르게 퍼져있다. 이 공의 전체 전하가 Q 일 때, 공 밖의 전기장을 구하시오.
7. (20점) 반지름이 R 인 도체구가 있다. 이 도체구의 중심으로부터 거리 a ($a > R$)만큼 떨어진 지점에 전하 q 가 놓여 있을 때 전하 q 가 받는 힘의 크기를 구하시오. (단,

도체구의 전체 전하는 0이고 이 도체구와 전하 q 는 외부와 완전히 고립되어 있으며 도체구의 전위는 0이 아니다.)

8. (20점) 중심이 원점에 위치한, 반지름이 R 인 도체구가 있다. 이 도체구의 전체 전하는 0이고, 균일한 전기장 $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ 의 영향 아래에 있다($\hat{z}$ 는 z 축 방향 단위벡터). 구면좌표계를 사용하여 이 도체구에 유도되는 표면전하밀도 σ 를 구하시오.
9. (20점) 중심이 원점에 위치한, 반지름이 R 인 구껍질이 있다. 구껍질 위의 표면전하밀도가 $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ 일 때, 이 구껍질에 의한 전기쌍극자 $\vec{p}$ 를 구하시오. 단, σ_0 는 상수이고, 구의 원점을 중심으로 하는 구면좌표계 (r, θ, ϕ) 를 사용하고 있다.
10. (20점) 균일한 전기장 $\vec{E}_0$ 가 있는 빈 공간에 선형 유전체로 된 공을 두었다. 유전체의 반지름은 R 이고 유전상수(상대유전율)는 K 다. 유전체 내부의 전기장은

$$\vec{E} = \frac{3}{K+2} \vec{E}_0$$

가 됨을 보이시오.

11. (20점) 반지름이 a 인 도체구가 반지름 c 인 도체구 껍질 안에 들어있다. 도체구와 도체구 껍질의 중심은 일치한다. 도체구와 도체구 껍질 중간에 $r = a$ 부터 $r = b$ 까지 유전율 ϵ 인 선형 유전체가 들어가 있다($a < b < c$). 이 도체구, 도체구 껍질, 유전체로 이루어진 축전기의 전기용량을 구하시오.

1. (20점) 길이가 a 인 1차원 상자 속에 질량이 m 인 입자가 있다. 해밀토니안의 고유값과 규격화된 고유상태를 구하시오.

2. (20점) 조화 진동자의 해밀토니안은 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}_+ \hat{a}_- + \frac{1}{2} \right)$$

위에서 $\hat{a}_+$, $\hat{a}_-$ 는 계단 연산자로서 다음의 교환관계를 만족한다. $[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1$. 위 식을 이용하여 $[\hat{H}, \hat{a}_\pm] = \pm \hbar\omega \hat{a}_\pm$ 이 됨을 보이고, 이 결과를 이용하여 $\psi_n(x)$ 가 $\hat{H}$ 의 고유상태이고 그 고유값이 E 라면, $\hat{a}_\pm \psi_n(x)$ 역시 $\hat{H}$ 의 고유상태이고 그 고유값이 $E \pm \hbar\omega$ 임을 보이시오.

3. (20점) 에르미트(hermitian) 연산자 $\hat{A}$ 의 고유값은 반드시 실수가 됨을 보이고, $\hat{A}$ 의 서로 다른 고유값에 대응하는 두 고유벡터는 직교함을 보이시오.

4. (20점) 어떤 연산자 $\hat{\Omega}$ 에 대하여 $\hat{\Omega}^\dagger$ 는 모든 벡터 V , W 에 대하여 다음의 관계식을 만족시키는 연산자로 정의된다. $\langle V | \hat{\Omega}^\dagger | W \rangle = \langle W | \hat{\Omega} | V \rangle^*$ 여기서 $*$ 는 복소수 켤레를 의미한다. 이 정의로부터 다음을 보이시오.

(a) α 가 복소수이면 $\alpha^\dagger = \alpha^*$.

(a) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$

5. (20점) 일차원 델타 포텐셜 $V(x) = \alpha\delta(x)$ 의 영향을 받는 질량 m 인 물체의 산란상태에 대하여 투과계수 T 를 구하시오.

6. (20점) 일차원 델타 포텐셜 $V(x) = -\alpha\delta(x)$ 의 영향을 받는 질량 m 인 물체의 속박상태의 에너지와 파동함수를 구하시오. (단, $\alpha > 0$ 이고 파동함수의 규격화는 고려하지 않아도 된다.)

7. (20점) 조화 진동자의 고유함수는 다음을 만족한다.

$$\hat{H}\psi_n(x) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \psi_n(x)$$

단, $\psi_n(x)$ 는 규격화되어 있다. 만약 이 입자의 파동함수가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$\psi(x) = C [\psi_0(x) + i2\psi_1(x) - 2\psi_3(x)]$$

규격화 상수 C 를 구하고, 이 상태에 대한 에너지 평균을 구하시오.

8. (20점) 2차원 힐버트 공간의 직교기저 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 에 대하여 해밀토니안이 다음과 같은 행렬로 표현된다고 하자.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & V \\ V & E \end{pmatrix}$$

단, E, V 는 모두 실수이다. 이 해밀토니안의 고유값과 고유상태를 구하시오.

9. (20점) $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ 임을 보이고, 이 결과를 이용하여 $[\hat{x}, \hat{p}^n] = i\hbar n \hat{p}^{n-1}$ (n 은 양의 정수)가 성립함을 수학적 귀납법으로 보이시오.

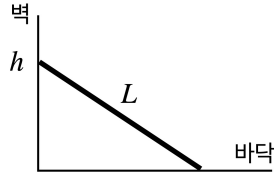
10. (20점) 정상상태에 대하여 아래 식이 성립함을 보이시오.

$$2\langle T \rangle = \left\langle x \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

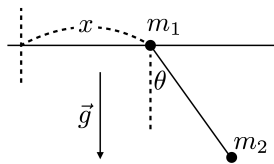
반드시 이 결과를 이용하여 조화진동자의 정상상태에서 운동에너지의 평균과 위치에너지의 평균이 같음을 보이시오.

11. (20점) $\hat{A}|n\rangle = c_n|n\rangle$ 이고 고유값은 겹치지 않는다. 만약 $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ 이면 $|n\rangle$ 역시 $\hat{B}$ 의 고유상태가 됨을 보이시오.

1. (25점) 마찰이 없는 바닥과 벽에 길이 L 인 막대가 그림처럼 놓여 있다. 막대가 미끄러지기 시작할 때, 막대가 벽에 접한 위치의 높이가 h 라고 한다면, 막대가 벽에서 떨어지는 순간, 막대가 벽에 접한 위치의 높이를 구하시오.



2. (25점) 길이가 L 이고 질량이 m 인 균질한 막대의 양쪽 끝을 두 사람이 들고 있다. 한 사람이 갑자기 막대를 놓았다고 하자. 막대를 놓는 순간 다른 사람의 손에 작용하는 하중은 얼마인가?
3. (25점) 위치에너지가 중심으로부터의 거리 r 만의 함수인 중심력이 있다. 위치에너지를 $V(r)$ 이라고 할 때, 이 중심력의 영향을 받아 평면에서 움직이는 질량 m 인 물체의 라그랑지안을 r, θ (극좌표)를 이용하여 쓰고, 그 오일러-라그랑지 방정식을 이용하여 그 운동방정식을 쓰시오.
4. (25점) 질량이 m_1 인 물체 A에 길이가 L 이고 추의 질량이 m_2 인 단진자가 연결되어 있다. 물체 A는 중력방향에 수직인 선에서 1차원 운동을 한다. 그림의 일반화 좌표 (x, θ) 를 이용하여 운동방정식을 쓰시오. (단, 두 물체의 운동은 종이의 평면에 국한되어 있다고 가정하고, 모든 종류의 마찰은 무시한다.)



5. (25점) 위치에너지 $V(x)$ 의 영향을 받으며 일차원 운동하는 질량 m 인 입자의 라그랑지안을 쓰고, 오일러-라그랑지 방정식은 뉴턴의 가속도 법칙과 같음을 보이시오.
6. (25점) 맥스웰 방정식을 쓰고, 진공에서 전기장과 자기장의 파동방정식을 유도하시오.

7. (25점) 전류 I 가 고르게 흐르고 있는 반지름 R 인 긴 원통형 전선이 있다. 이 전선의 중심으로부터 r 만큼 떨어진 지점의 자기장의 세기를 구하시오. 단, $r < R$ 이다.

8. (25점) 기전력 $\mathcal{E}_0$ 인 전지에 저항(R)과 인덕터(인덕턴스 L)를 직렬로 연결하였다. 시간 $t = 0$ 일 때 전류가 흐르기 시작한다면, 전류가 시간에 따라 다음과 같이 됨을 보이시오.

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} [1 - e^{-(R/L)t}]$$

9. (25점) 균일한 자기장 $\vec{B} = B\hat{z}$ 속에서 질량 m , 전하 q 인 점입자가 속도 $\vec{v} = v_0\hat{y}$ 로 운동을 시작하면 등속 원운동을 하게 된다. 이 원의 반지름을 구하시오.
10. (25점) z 축 방향으로 자기장 $\vec{B}(t) = B(t)\hat{z}$ 가 고르게 퍼져있다. 이 자기장은 $B(t) = B_0 + bt$ (B_0, b 는 상수)처럼 시간에 따라 변한다. xy 평면에 놓인 반지름 a 인 금속고리에 유도되는 기전력을 구하시오.
11. (25점) 각 운동량 연산자 $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$ 는 다음의 교환자 관계가 성립한다.

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

$\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2$ 이라고 할 때, $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$ 임을 보이시오.

12. (25점) 각운동량 연산자 $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$ 에 대해 다음의 교환자 관계가 성립한다.

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2$ 라고 할 때, $[\hat{L}_3, \hat{L}_{\pm}] = \pm\hbar\hat{L}_{\pm}$ 임을 보이시오.

13. (25점) 길이가 a 인 1차원 상자 안에 질량이 m 인 입자가 놓여 있다. 이 입자는 $\hat{V} = \alpha\delta(x-a/2)$ 인 섭동의 영향을 받고 있다. 이 계의 모든 에너지 고유치를 1차 섭동론을 이용하여 구하시오. (단, 섭동이 없는 상자속의 입자의 고유치와 고유상태는 유도하지 않고 결과만 사용해도 된다.)

14. (25점) 조화 진동자의 해밀토니안은 다음과 같다.

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}_+ \hat{a}_- + \frac{1}{2} \right)$$

$\hat{a}_\pm$ 은 사다리 연산자이다. 하이젠베르크 묘사에서 사다리 연산자를 $\hat{a}_\pm^H(t)$ 라고 한다면,

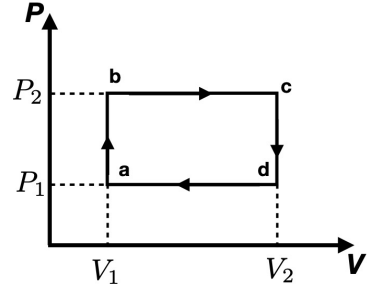
$$\frac{d\hat{a}_\pm^H}{dt} = \pm i\omega \hat{a}_\pm^H$$

가 됨을 보이시오.

15. (25점) 두 개의 동일한 페르미온이 1차원 상자 속에 놓여 있다. 이 입자들 사이의 상호작용을 무시하고, 스핀은 0이라고 가정하자. 이 계의 바닥상태의 에너지와 고유함수는 무엇인가? (단, 단일 입자가 상자 속에 있을 때의 고유함수와 고유값은 유도하지 않고 결과만 사용해도 된다.)
16. (25점) 에너지가 $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ 로 주어지는 1차원 조화 진동자가 온도 T 인 열원(heat reservoir)과 접촉하고 있다. 이 조화 진동자의 분배함수를 구하고, 이를 이용하여 평균 에너지를 구하시오.
17. (25점) 질량이 m 인 단위자 분자 N 개로 이루어진 이상 기체가 있다. 이 이상기체의 부피는 V 이고 이 이상기체는 온도가 T 인 열원(heat reservoir)과 접촉하여 열적 평형상태를 이루고 있다. 이 이상기체의 분배함수를 계산

하고, 이를 이용하여 한 입자의 평균에너지를 구하시오. 단, 양자역학을 고려하지 마시오.

18. (25점) 아래 그림은 열 순환 과정($a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$)을 나타내고 있다. 한 번 순환할 동안 계가 외부에 한 일의 크기를 구하시오.



19. (25점) 어떤 계의 헬름홀츠 자유에너지가 다음과 같다.

$$F(T) = -N(k_B T)^2 / \epsilon_0$$

이 계의 엔트로피를 구하시오.

20. (25점) 가능한 에너지 값이 $-\epsilon$, ϵ 인 원자가 N 개 있는 계가 있다. 원자간의 상호작용은 무시한다. 이 계가 온도 T 의 열적 평형상태에 있다면, 전체 평균에너지는

$$\langle E \rangle = -N\epsilon \tanh(\beta\epsilon)$$

이 됨을 보이시오. 단, $\beta = 1/(k_B T)$ 이고 $\epsilon > 0$ 이다.